Alumno____ nº matrícula: ☐☐☐☐☐

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador. 6) no se hacen aclaraciones.

Ejercicio nº 1.- En el espacio vectorial $\mathbb{V}_3$ se consideran las bases $\{\vec{g}_i\}$ y $\{\vec{g}'_i\}$ y sus reciprocas respectivas, $\{\vec{g}^i\}$ y $\{\vec{g}'^i\}$, donde $\vec{g}'_j = a^i_j\vec{g}_i$ y $\vec{g}'^i = b^i_j\vec{g}^j$. Se definen los tensores $\underline{\mathbf{T}} = \vec{g}'_i\otimes\vec{g}^i$ y $\underline{\mathbf{S}} = \vec{g}_i\otimes\vec{g}'^i$. Se pide:

1) Obtener la relación entre las matrices de cambio de base $A = [a^i_j]$ y $B = [b^i_j]$, donde i y j representan índices de fila y de columna respectivamente, y obtener los transformados de los elementos de las bases $\{\vec{g}^i\}$ y $\{\vec{g}'^i\}$ mediante la actuación respectiva de los tensores $\underline{\mathbf{T}}$ y $\underline{\mathbf{S}}$, es decir: $\underline{\mathbf{T}}\cdot\vec{g}_i = ?$ y $\underline{\mathbf{S}}\cdot\vec{g}'_i = ?$ [2 puntos]

2) Obtener las componentes contra-covariantes, en la base relativa a $\{\vec{g}_i\}$, del tensor $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{S}}\cdot\underline{\mathbf{T}}$ y responder razonadamente a lo siguiente: ¿es $\underline{\mathbf{P}}$ un tensor regular? ¿es simétrico? ¿es ortogonal? ¿qué transformación geométrica (rotación, homotecia, simetría, etc…) representa? [2 puntos]

3) Suponiendo que las bases $\{\vec{g}_i\}$ y $\{\vec{g}'_i\}$ tienen la misma orientación, que los módulos $|\vec{g}_i| = |\vec{g}'_i|$ ($\forall$i = 1, 2, 3) y que los ángulos $\theta_{ij} = \theta'_{ij}$, $\forall i \neq j$, donde $\theta_{ij} = \widehat{(\vec{g}_i,\vec{g}_j)}$ y $\theta'_{ij} = \widehat{(\vec{g}'_i,\vec{g}'_j)}$, verificar que, entonces, $\underline{\mathbf{T}}$ es un tensor rotación. [Sugerencia: probar que $g_{ij} = g'_{ij}$, $\forall$i, j = 1, 2, 3, implica que $\underline{\mathbf{T}}$ es ortogonal y que $\det\underline{\mathbf{T}} = \frac{[\vec{g}'_1,\vec{g}'_2,\vec{g}'_3]}{[\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3]} = 1$]. [3 puntos]

4) Aplicación: Tres aristas, a, b y c, de longitud unidad, de un tetraedro no regular, cuyo vértice común es el origen, se definen respectivamente por los vectores de la base $\{\vec{g}_i\}$. El tetraedro gira en el espacio alrededor de una recta *r* que pasa por el origen y las tres aristas anteriores quedan definidas ahora por los vectores de la base $\{\vec{g}'_i\}$. Sabiendo que, en la base canónica $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, $\vec{g}_1 = \vec{i}$, $\vec{g}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{g}_3 = \vec{k}$ y que $\vec{g}'_1 = \vec{j}$, $\vec{g}'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j}+\vec{k})$, $\vec{g}'_3 = \vec{i}$, determinar el vector $\vec{n}$ que define el eje de rotación y el ángulo θ de giro. [3 ptos.]

Solución:

•1) i) Si interpretamos las columnas de la matriz *A*, se tiene: $\underline{g}'_j = a^i_j\underline{g}_i \Leftrightarrow A = [a^i_j] = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{g}'_1 & \underline{g}'_2 & \underline{g}'_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{g}_i\}}$ y,

análogamente, las filas de *B* son: $\underline{g}'^i = b^i_j\,\underline{g}^j \Leftrightarrow B = [b^i_j] = \begin{bmatrix} - & \underline{g}'^1 & - \\ - & \underline{g}'^2 & - \\ - & \underline{g}'^3 & - \end{bmatrix}_{\{\underline{g}^i\}}$. Las relaciones de reciprocidad de las bases $\{\underline{g}'_i\}$ y $\{\underline{g}'^i\}$ permiten asegurar que $\underline{g}'^i\cdot\underline{g}'_j = \delta^i_j$, lo que es cierto intrínsecamente, es decir, en cualquier base en que se efectúe correctamente el producto escalar. Una forma correcta de hacerlo es utilizando las componentes covariantes de $\underline{g}'^i$ en la base $\{\underline{g}_k\}$ (o sea, en realidad en la base $\{\underline{g}^k\}$) y las componentes contravariantes de $\underline{g}'_j$ en dicha base $\{\underline{g}_k\}$. El algoritmo *fila×columna* del producto matricial, permite efectuar los nueve productos $\underline{g}'^i\cdot\underline{g}'_j$ en las componentes indicadas sin más que multiplicar la matriz *B* por la *A* : así, las igualdades $\underline{g}'^i\cdot\underline{g}'_j = \delta^i_j$ nos permiten asegurar que $B\cdot A = I = [\delta^i_j]$, es decir, que se cumple:

$$A^{-1} = B$$

Notas: 1) Se llega a la misma conclusión simplemente efectuando: $\underline{g}'^i\cdot\underline{g}'_j = (b^i_h\underline{g}^h)\cdot(a^k_j\underline{g}_k) = b^i_h a^k_j\delta^h_k = b^i_h a^h_j = \delta^i_j$.
2) Se observa que la matriz *A* contiene las componentes mixtas contra-covas de $\underline{\mathbf{T}}$ en la base $\{\underline{g}_i\}$.

ii) Se tiene:

$$\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{g}_i = (\underline{g}'_j\otimes\underline{g}^j)\cdot\underline{g}_i = \underline{g}'_j(\underline{g}^j\cdot\underline{g}_i) = \underline{g}'_j\delta^j_i = \underline{g}'_i\ ;\ \underline{\mathbf{S}}\cdot\underline{g}'_i = (\underline{g}_j\otimes\underline{g}'^j)\cdot\underline{g}'_i = \underline{g}_j(\underline{g}'^j\cdot\underline{g}'_i) = \underline{g}_j\delta^j_i = \underline{g}_i$$

de manera que $\underline{\mathbf{T}}$ actúa sobre la base "antigua" produciendo la "nueva"; y $\underline{\mathbf{S}}$ actúa sobre la base recíproca "antigua" y produce la recíproca "nueva".

● 2) $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{S}}\cdot\underline{\mathbf{T}} = (\underline{g}'_i\otimes\underline{g}^i)\cdot(\underline{g}_j\otimes\underline{g}'^j) + (\underline{g}_i\otimes\underline{g}'^i)\cdot(\underline{g}'_j\otimes\underline{g}^j) = \delta^i_j\underline{g}'_i\otimes\underline{g}'^j + \delta^i_j\underline{g}_i\otimes\underline{g}^j = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{1}} = 2\,\underline{\mathbf{1}}$.

De ello se desprende: i) $\underline{\mathbf{P}}$ es *regular*, pues $\det(\underline{\mathbf{P}}) = 2^3\det(\underline{\mathbf{1}}) = 8 \neq 0$; ii) $\underline{\mathbf{P}}$ es *simétrico*, al ser un múltiplo escalar del tensor métrico, que es simétrico; iii) $\underline{\mathbf{P}}$ no es *ortogonal*, pues $\underline{\mathbf{P}}^t\cdot\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}\cdot\underline{\mathbf{P}} = 4\cdot\underline{\mathbf{1}} \neq \underline{\mathbf{1}}$; iv) $\underline{\mathbf{P}}$ representa una *homotecia* de razón 2, pues $\forall\underline{v}\in\mathbb{V}_3 : \underline{\mathbf{P}}\cdot\underline{v} = 2\underline{v}$.

Nota: Se observa, además, que $\underline{\mathbf{T}}$ y $\underline{\mathbf{S}}$ son tensores inversos mutuamente, pues $\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}\cdot\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{1}}$. De este modo, la matriz *B* contiene también las componentes contra-covariantes de $\underline{\mathbf{S}}$ en la base $\{\underline{g}_i\}$. Esto prueba de otro modo que $\underline{\mathbf{P}}$ es $2\cdot\underline{\mathbf{1}}$.

●3) Para ver que $\underline{\mathbf{T}}$ es una rotación, hay que comprobar que $\underline{\mathbf{T}}$ es ortogonal (es decir, $\underline{\mathbf{T}}^t\cdot\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{1}}$) y que det($\underline{\mathbf{T}}$) = +1. Las condiciones del enunciado sobre las bases permiten asegurar que las dos matrices de Gram correspondientes coinciden, es decir, que si $G = [\mathrm{g}_{ij}] = [\underline{g}_i\cdot\underline{g}_j]$ y $G' = [\mathrm{g}'_{ij}] = [\underline{g}'_i\cdot\underline{g}'_j]$, entonces $G = G'$. Porque si $i\neq j$: $\mathrm{g}_{ij} = \underline{g}_i\cdot\underline{g}_j = |\underline{g}_i||\underline{g}_j|\cos\theta_{ij} = |\underline{g}'_i||\underline{g}'_j|\cos\theta'_{ij} = \mathrm{g}'_{ij}$; y para cada i : $\mathrm{g}_{ii} = |\underline{g}_i|^2 = |\underline{g}'_i|^2 = \mathrm{g}'_{ii}$. Sabiendo esto, efectuamos:

$$\underline{\mathbf{T}}^t\cdot\underline{\mathbf{T}} = (\underline{g}'_i\otimes\underline{g}^i)^t\cdot(\underline{g}'_j\otimes\underline{g}^j) = (\underline{g}^i\otimes\underline{g}'_i)\cdot(\underline{g}'_j\otimes\underline{g}^j) = \mathrm{g}'_{ij}(\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j) = \mathrm{g}_{ij}(\underline{g}^i\otimes\underline{g}^j) = \underline{\mathbf{1}}$$

Por otro lado

$$\det(\underline{\mathbf{T}}) = \frac{[\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{g}_1, \underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{g}_2, \underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{g}_3]}{[\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3]} = \frac{[\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \underline{g}'_3]}{[\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3]} = \frac{\sqrt{\mathrm{g}'}}{\sqrt{\mathrm{g}}} = 1,$$

donde se usa que las dos bases tienen la misma orientación. Así queda probado que las condiciones del apartado 3º implican que $\underline{\mathbf{T}}$ es una rotación.

●4) Se dan las bases $\{\underline{g}_i\}$ y $\{\underline{g}'_j\}$ en una base canónica $\{\underline{\mathrm{i}}, \underline{\mathrm{j}}, \underline{\mathrm{k}}\}$ y se piden el eje $\underline{n}$ y el ángulo θ de la rotación $\underline{\mathbf{T}}$ que lleva la primera a la segunda. Sabemos que $\underline{\mathbf{T}} = (\underline{g}'_j\otimes\underline{g}^j)$ y podemos efectuar el producto tensorial en la base canónica si obtenemos la recíproca de $\{\underline{g}_i\}$. Se tiene:

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{g}_1 & \underline{g}_2 & \underline{g}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{\mathrm{i}},\underline{\mathrm{j}},\underline{\mathrm{k}}\}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} - & \underline{g}^1 & - \\ - & \underline{g}^2 & - \\ - & \underline{g}^3 & - \end{bmatrix}_{\{\underline{\mathrm{i}},\underline{\mathrm{j}},\underline{\mathrm{k}}\}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, efectuamos:

$$\underline{g}'_j\otimes\underline{g}^j = \underline{g}'_1\otimes\underline{g}^1 + \underline{g}'_2\otimes\underline{g}^2 + \underline{g}'_3\otimes\underline{g}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que proporciona la matriz de la rotación $\underline{\mathbf{T}}$ en la base canónica en que se dan las aristas de los tetraedros. Sabemos que entonces:

$\cos\theta = \frac{1}{2}\,[\mathrm{traza}(\underline{\mathbf{T}}) - 1] = \frac{1}{2}\,(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} = 120º$;

$$2\,\mathrm{sen}\theta\,\underline{n}\times = \underline{\mathbf{T}} - \underline{\mathbf{T}}^t = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{n}\times = \frac{1}{\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{\mathrm{i}} + \underline{\mathrm{j}} + \underline{\mathrm{k}})$$

Nota: También se pueden deducir $\underline{n}$ y θ razonando geométricamente, sabiendo, por la matriz de $\underline{\mathbf{T}}$ en $\{\underline{\mathrm{i}}, \underline{\mathrm{j}}, \underline{\mathrm{k}}\}$, que se cumple: $\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{\mathrm{i}} = \underline{\mathrm{j}}$, $\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{\mathrm{j}} = \underline{\mathrm{k}}$, $\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{\mathrm{k}} = \underline{\mathrm{i}}$ #.